令和６年度　徳山工業高等専門学校入学者選抜学力検査（数学）本試験の解答　※解き方の一例です。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えなさい。

(1) $-2^2-\frac{5}{3}\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+(-3)^2$ を計算すると $\boxed{\text{ア}}$ となる。

$=-4-\frac{5}{3}\div\frac{5}{6}+9=-4-\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}+9=-4-2+9=3$

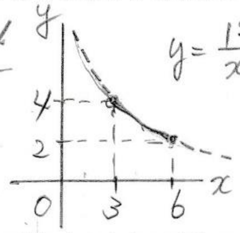
$\underline{3}$

(2) 2次方程式 $x^2-4x+1=0$ を解くと $x=\boxed{\text{イ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ となる。

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$\underline{x=2\pm\sqrt{3}}$

(3) y は x に反比例し，$x=4$ のとき $y=3$ である。この関数において x の変域を $3\leqq x\leqq6$ とするとき，y の変域は $\boxed{\text{エ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{オ}}$ となる。 $\underline{2\leqq y\leqq4}$



$y=\frac{12}{x}$

y は x に反比例 → $y=\frac{a}{x}$ とおける。

$x=4$ のとき $y=3$ だから

$3=\frac{a}{4}$ → $a=12$

よって，$y=\frac{12}{x}$

x	3 ‥‥ 6
y	4 ‥‥ 2

(4) 2つの関数 $y=ax^2$，$y=2x+3$ について，x の値が2から6まで増加するときの変化の割合が等しいとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

$y=ax^2$ の変化の対応表は

x	$2\longrightarrow6$
y	$4a\longrightarrow36a$

x の増加量 $=6-2=4$　y の増加量 $=36a-4a=32a$

$y=ax^2$ の変化の割合は

$\frac{32a}{4}=8a$

$y=2x+3$ の変化の割合は傾き2に等しいので，$8a=2$ より $a=\frac{1}{4}$

$\underline{a=\frac{1}{4}}$

(5) 2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の和が3の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。ただし，2個のさいころはそれぞれ1から6までの目が出るとし，どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

2個のさいころの目の出方は，全部で $6\times6=36$ とおり

出る目の数の和が3の倍数になる場合は，

(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5)

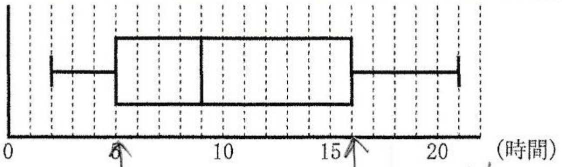
(5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6) の12とおりである。

よって，求める確率は $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

$\underline{\frac{1}{3}}$

(6) 下の図は，あるクラスの１ヶ月の読書時間の記録を箱ひげ図にしたものである。単位は時間である。

(四分位範囲) = (第3四分位数) − (第1四分位数)



5
(第1四分位数)

16
(第3四分位数)

このとき，四分位範囲は $\boxed{コサ}$ (時間) である。

11

四分位範囲 $= 16 - 5 = 11$

(7) 下の図の△ABC において，∠A ＝ 36° であり，点 D は∠B と∠C の二等分線の交点である。このとき，∠x ＝ $\boxed{シスセ}$ ° である。

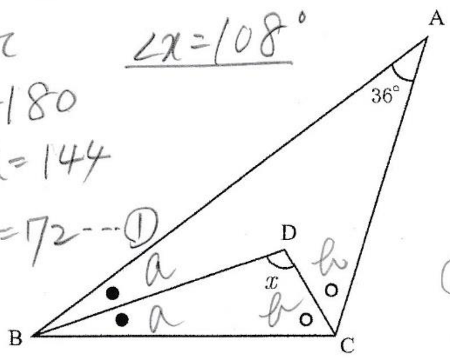
$\angle x = 108^\circ$

△ABC において

$36 + 2a + 2b = 180$

$2a + 2b = 144$

$a + b = 72$ ---- ①



△BCD において

$a + b + x = 180$

$x = 180 - (a + b)$ ---- ②

①，②より

$x = 180 - 72 = 108$

(8) 下の図のように，底面の半径が 2 cm，高さ $4\sqrt{2}$ cm の円錐があり，底面の円周上の１点から側面にそって１周するように糸をかける。この糸が最も短くなるときの糸の長さは $\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}$ cm である。

糸の長さAA′は $6\sqrt{3}$ cm

頂点Bから底面に垂線を引く。

△AOBは∠AOB=90°の直角三角形だから

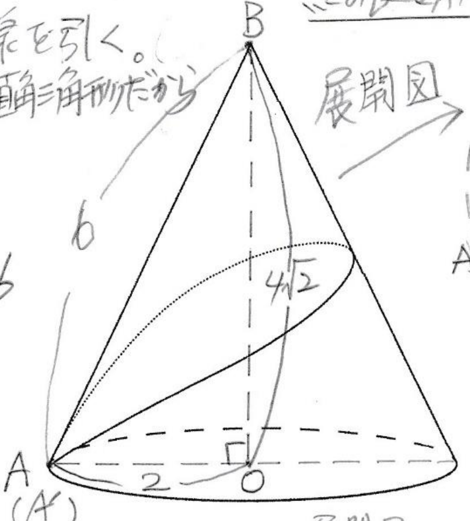
三平方の定理により

$AB = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2}$

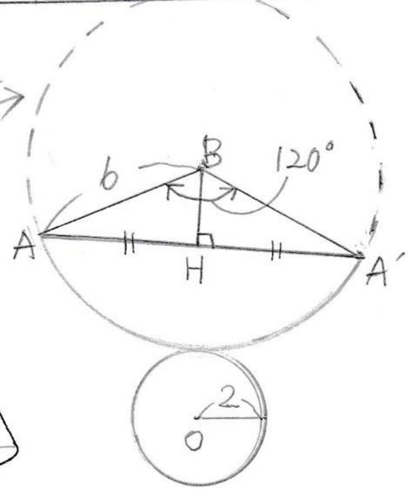
$= \sqrt{4 + 32} = \sqrt{36} = 6$

糸が最短になるには，

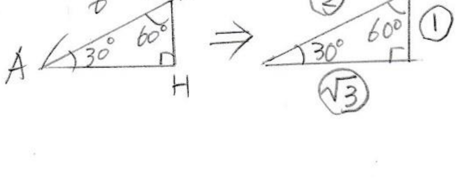
展開図で，AA′が直線になればよい。



展開図



$\angle ABA' = 360^\circ \times \dfrac{2\pi \times 2}{2\pi \times 6} = 120^\circ$



展開図で△AHB (△A′HB) は特別な直角三角形だから

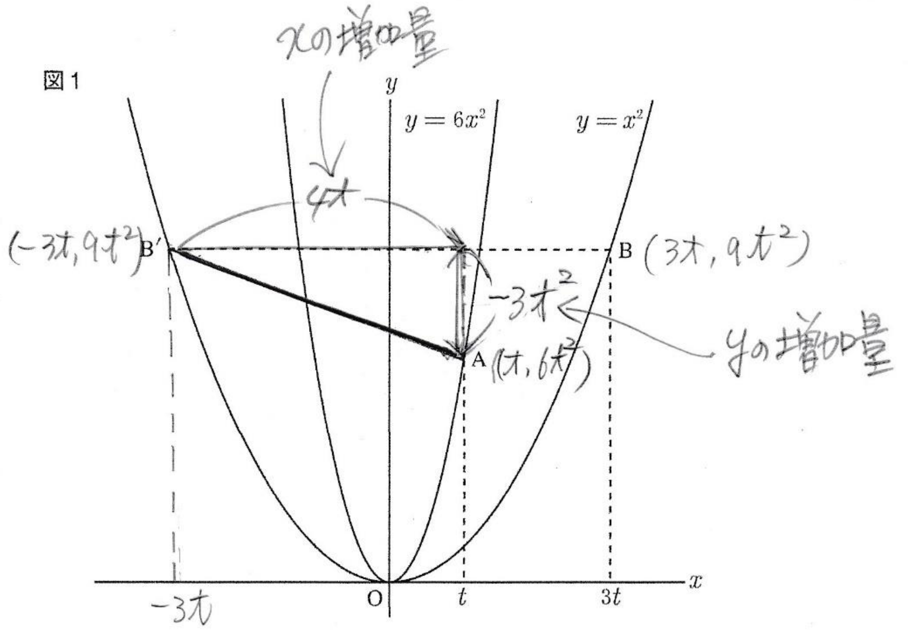
$AH = AB \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

よってAA′ $= 3\sqrt{3} \times 2$

$= 6\sqrt{3}$

2　t は正の定数とする。図1のように，関数 $y=6x^2$ のグラフ上に点 A $(t,\ 6t^2)$ をとり，関数 $y=x^2$ のグラフ上に点 B $(3t,\ 9t^2)$ をとる。また，y 軸に関して点 B と対称な点を B′ とする。

図1



このとき，次の各問いに答えなさい。

(1)　$t=2$ のとき，直線 AB′ の傾きは $-\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である。　直線AB′の傾きは $-\dfrac{3}{2}$

$t=2$ なので $A(2,24)$, $B(6,36)$

点B′はy軸に対して点Bと対称な点だから $B'(-6,36)$

よって、変化と対応表は、

x	-6 ---- 2
y	36 ---- 24

これから 傾き＝変化の割合＝$\dfrac{24-36}{2-(-6)}=\dfrac{-12}{8}=-\dfrac{3}{2}$

(2)　直線 AB′ の方程式を t を用いて表すと

$$y=\frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}tx+\frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}t^2$$

である。

直線AB′の方程式は $y=ax+b$ とおける。

これが $B'(-3t,9t^2)$, $A(t,6t^2)$ を通るので $y=ax+b$ に代入すると

$$\begin{cases} 6t^2=at+b \cdots ① \\ 9t^2=-3at+b \cdots ② \end{cases}$$

①−②より

$4ta=-3t^2$

よって　$a=-\dfrac{3}{4}t$

$a=-\dfrac{3}{4}t$ を①に代入

$6t^2=-\dfrac{3}{4}t\times t+b$

これから

$b=\dfrac{27}{4}t^2$

したがって直線AB′の方程式は

$y=-\dfrac{3}{4}tx+\dfrac{27}{4}t^2$

(別解) 変化と対応表

x	$-3t$ ---- t
y	$9t^2$ ---- $6t^2$

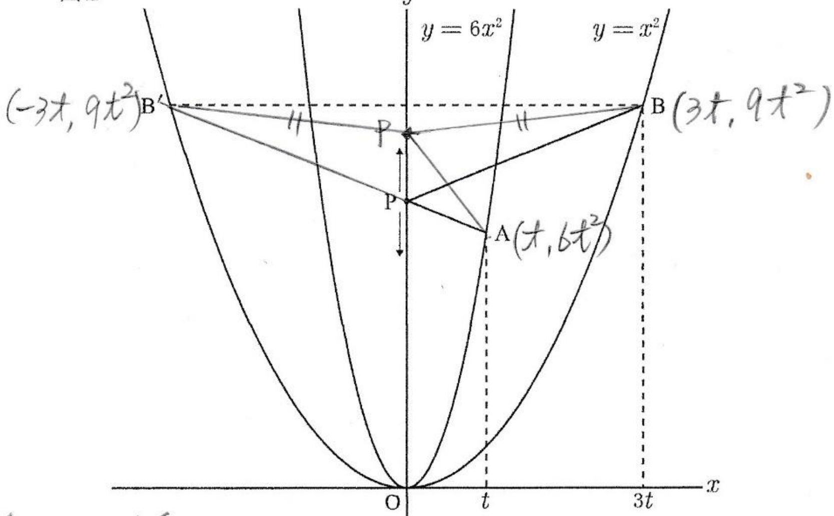
傾き a は

$a=\dfrac{6t^2-9t^2}{t-(-3t)}=\dfrac{-3t^2}{4t}=-\dfrac{3}{4}t$

以下前と同じように解く。

(3) 図2のように，y 軸上を動く点Pを考える。線分APと線分BPの長さの和が最小となる点Pの座標が (0, 3) であるとき，$t = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

図2



線分APと線BPの長さの和は、AP+BPで表される。
点Bと点B'は、y軸に対して線対称だから、BP=B'P
よって、AP+BP=AP+B'P
図2から、点Pがy軸上を動くとき、AP+B'Pが最小になるのは、点Pが線分A'B上にあるときである。(APB'が直線)
(2)より、直線AB'の方程式は、$y=-\frac{3t}{4}x+\frac{27}{4}t^2$である。
題意より、線分APと線分BPの長さの和が最小になるのは、点Pの座標が(0, 3)であるので、切片$\frac{27}{4}t^2$が3であればよい。
したがって、$\frac{27}{4}t^2=3$ より、$t^2=3\times\frac{4}{27}=\frac{4}{9}$
よって、$t=\pm\frac{2}{3}$、$t>0$から$t=\frac{2}{3}$

$t=\frac{2}{3}$

3 図１のように，円Ｏの円周上に３点Ａ，Ｂ，Ｃがある。△ABCにおいて $AB=\sqrt{13}$，$BC=6$，$CA=5$ である。図２は，図１において点Ａから辺BCに垂線を引き，BCとの交点をＤとしたものである。また，点Ａを通る直径AEを引き，２点Ｃ，Ｅを線分で結ぶ。

図１

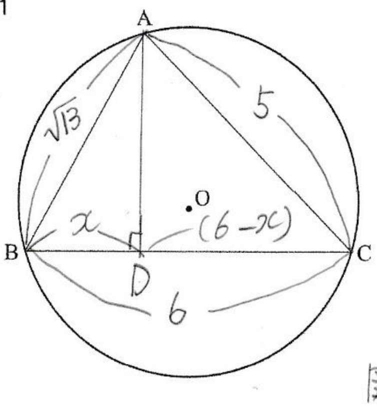


図２

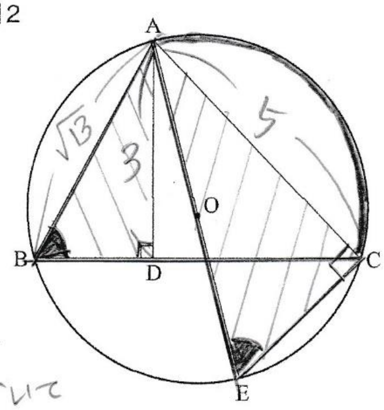


図1において

このとき，次の各問いに答えなさい。 BD＝x, CD＝(6−x) とおくと三平方の定理から

AD＝3

$AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$

x＝2より (1) AD＝$\boxed{\text{ア}}$である。 よって，$(\sqrt{13})^2-x^2=5^2-(6-x)^2$ 整理すると．

$AD=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=\sqrt{9}=3$　　$13-x^2=25-(36-12x+x^2)$　$12x=24$ よって $x=2$

(2) △AEC∽△ABDであることを次のように証明した。$\boxed{\text{イ}}$から$\boxed{\text{オ}}$に当てはまるものを，下記のⓐからⓚの中から選びなさい。ただし，細字の空欄$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{オ}}$には，それぞれ前にある太字の空欄$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{オ}}$と同じものが当てはまる。

【証明】△AECと△ABDにおいて

１つの弧に対する$\boxed{\text{イ}}$は等しいので，弧ACにおいて

ⓑ円周角　　ⓖ∠ABD

∠AEC＝$\boxed{\text{ウ}}$・・・・①

ⓑ円周角　ⓓ中心角

仮定より∠ADB＝90°である。また，１つの弧に対する$\boxed{\text{イ}}$の大きさは$\boxed{\text{エ}}$の大きさの $\frac{1}{2}$ 倍なので，弧AEにおいて$\boxed{\text{オ}}$＝90°である。よって，

ⓘ∠ACE

ⓘ∠ACE

$\boxed{\text{オ}}$＝∠ADB・・・・②

①，②より２組の角がそれぞれ等しいので，△AEC∽△ABDである。【証明終わり】

ⓐ 対頂角	ⓑ 円周角	ⓒ 同位角	ⓓ 中心角
ⓔ 錯　角	ⓕ ∠DAB	ⓖ ∠ABD	ⓗ ∠CAD
ⓘ ∠ACE	ⓙ ∠DCA	ⓚ ∠BAC	

(3)　円Oの半径は $\frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キク}}}{\boxed{ケ}}$ である。　円Oの半径は $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

(2)より、△AEC∽△ABDだから

AB：AE＝AD：AC

AE＝xとすると

$\sqrt{13} : x = 3 : 5$

よって、$3x = 5\sqrt{13}$

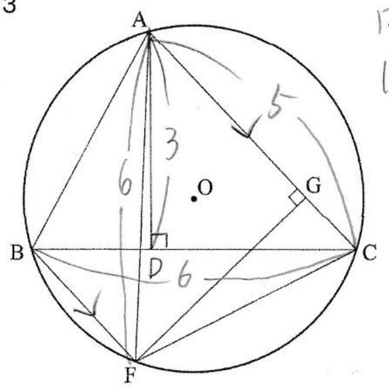
$x = \frac{5\sqrt{13}}{3}$

よって、円Oの半径は

$\frac{5\sqrt{13}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{6}$

(4)　図3のように，図1において点Bを通り直線ACに平行な直線を引き，円Oとの交点をFとする。また，点Fから辺ACに垂線を引き，ACとの交点をGとする。

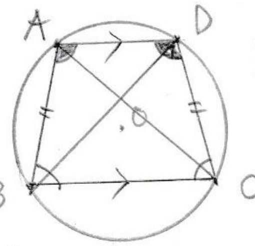
図3



(ポイント)

円に内接する四角形ABCDにおいて、AD//BCならば

AB＝DC，AC＝BDである



四角形ABCD → 等脚台形

このとき，△AFCの面積は $\boxed{コ}$ であり，AG＝$\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$ である。

(1)より、AD＝3だから　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

また、BF//ACだから△ABC＝△AFCである。

したがって、△AFC＝9　　　△AFC＝9

$\triangle AFC = \frac{1}{2} \times AC \times FG = \frac{1}{2} \times 5 \times FG = 9$ より

$FG = 9 \times \frac{2}{5} = \frac{18}{5}$

四角形BFCAは、BF//ACなので、等脚台形である。

よって、対角線BC＝AFとなり、AF＝6である。　$AG = \frac{24}{5}$

三角形AFGは∠AGF＝90°より、三平方の定理により

$AG = \sqrt{AF^2 - FG^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$

4 次の会話文における空欄 $\boxed{\text{アイ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ にあてはまる数を求めなさい。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$ のように細字で示された空欄には，前に太字で $\boxed{\textbf{アイ}}$ のように示された空欄と同一の数が入る。

(1) はじめさんとふみこさんが会話をしている。

はじめ：$1 \times 2 = 2$，$2 \times 3 = 6$，$3 \times 4 = 12$ のように，連続する 2 個の自然数の積は必ず偶数だね。

ふみこ：連続する 2 個の自然数の積は，文字を使って $n \times (n+1)$ と書けるね。n にはいろいろな自然数の可能性があるけど，n か $n+1$ のどちらかは必ず偶数なんだね。

はじめ：だから積 $n(n+1)$ は偶数になるんだ！

ふみこ：$\dfrac{n(n+1)}{2}$ はどんな自然数になるのかな？

はじめ：実際に調べてみると，下の表 1 のようになったよ。

表 1

n	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
1	1
2	3
3	6
4	10
5	$\boxed{\textbf{アイ}}$
⋮	⋮

ふみこ：例えば $n = 5$ のときは $\dfrac{n(n+1)}{2} = \boxed{\textbf{アイ}}$ だね。

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{5\times(5+1)}{2} = \frac{5\times 6}{2} = 15$$

15

(2) ふみこさんとみつおさんが会話をしている。

ふみこ：連続する 3 個の自然数 n，$n+1$，$n+2$ があったら，どれか 1 つは 3 の倍数だね。
だから積 $n(n+1)(n+2)$ は必ず 3 の倍数なんだね。

みつお：$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ はどんな自然数になるのかな？ 実際に調べてみると，下の**表 2** のようになったよ。

表 2

n	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
1	2
2	8
3	20
4	40
5	**ウエ**
⋮	⋮

ふみこ：例えば $n=5$ のときは $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ だね。

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{5\times(5+1)\times(5+2)}{3}=\frac{5\times6\times7}{3}=70$$

70

(3) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ や $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ の規則性に興味をもったふみこさんは，お姉さんのけいこさんに聞いてみることにした。けいこさんは高専生で，数学が得意である。

けいこ：はじめさんとみつおさんの表から下の**表３**を作ってみたらどうかな。

5	15
6	21

⇒

表３

n	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	$n(n+1)$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
1	1	2	2
2	3	6	8
3	6	12	20
4	10	20	40
5	アイ 15	$\boxed{\text{オカ}}$	ウエ
6	⋮ 21	⋮	⋮
7	28		
(1列目)	(2列目)	(3列目)	(4列目)

$n(n+1)$ も考えるのがポイントだよ。$n=5$ のときは $n(n+1)=\boxed{\text{オカ}}$ だね。 30

表３の中には $\begin{array}{|c|c|}\hline * & b \\ \hline a & a+b \\ \hline\end{array}$ というパターンがたくさん出てくるね。

$5\times(5+1)=30$

ふみこ：1列目と2列目を見てみると… $\begin{array}{|c|c|}\hline * & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ や $\begin{array}{|c|c|}\hline * & 3 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline\end{array}$ や $\begin{array}{|c|c|}\hline * & 6 \\ \hline 4 & 10 \\ \hline\end{array}$ というパターンがあるね。

あっ，$\boxed{\text{アイ}}$ 15 というのは $\boxed{\text{キ}}$ 5 ＋10 と同じだね！　$5+10 \longrightarrow$ 5

もしかして，$\boxed{\text{アイ}}$ 15 のすぐ下の欄は $\boxed{\text{ク}}$ ＋ $\boxed{\text{アイ}}$ 15 かな？　$6+15 \rightarrow$ 6

けいこ：そうだね。例えば $\boxed{\text{アイ}}$ 15 について，ふみこさんが気づいた等式

$\boxed{\text{アイ}}$ 15 ＝ $\boxed{\text{キ}}$ 5 ＋10，10＝4＋6，6＝3＋3，3＝2＋1

を組み合わせると，どんなことがわかるかな？　$1+2+3+4+5=15$

$\boxed{\text{アイ}}$ 15 というのは1から $\boxed{\text{ケ}}$ 5 までの自然数の合計になるんだよ。　5

例えば，表にはないけど1から7までの自然数の合計なら･･･

ふみこ：つまり1＋2＋3＋4＋5＋6＋7でしょ？このまま足し算すれば28とわかるね。

けいこ：その28とは，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ において $n=\boxed{\text{コ}}$ 7 を代入した値でしょ？　7

ふみこ：なるほど！文字式 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ を使うといちいち足し算しなくとも合計が求められるね！

$\dfrac{7\times(7+1)}{2}=28$

けいこ：表の3列目と4列目を見ると，連続する2個の自然数の積の合計がわかるね。

ふみこ：例えば $1\times2+2\times3+3\times4$ なら20だね・・・。あっ，これは $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

において $n=3$ を代入した値だね！

けいこ：表には書いていないけど

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+7\times8$$

という連続する2個の自然数の積の合計は，$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ において

7

$n=$ $\boxed{サ}$ を代入した値だよ。 7

ふみこ：連続する2個の自然数の積の合計を求めるときに，連続する3個の自然数の積を3で割った値が使えるなんて，おもしろいね。

けいこ：連続する k 個の自然数の積の合計を求めるときにも，連続する $k+1$ 個の自然数の積を $k+1$ で割った値が使えるよ。

まあ，一般的な k 個の話なんてまだ難しいかもしれないけどね。

ふみこ：う〜ん・・・チンプンカンプンだけど，いつか理解できるようになってみたいな。

けいこ：実は表の4列目と2列目の差についても規則性があるよ。

ふみこさん，差

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

を計算して

$$\frac{n(n+1)X}{6}$$

という形に整理してみて。X はどんな式になるかな？

ふみこ：え〜っ！？難しい・・・

けいこ：正解は $X=$ $\boxed{シ}$ $n+$ $\boxed{ス}$ だよ。

この数式や4列目と2列目の差の規則性には，高専に入ったら再会するよ。

勉強がんばってね！

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)\{2(n+2)-3\}}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ これから $X=2n+1$